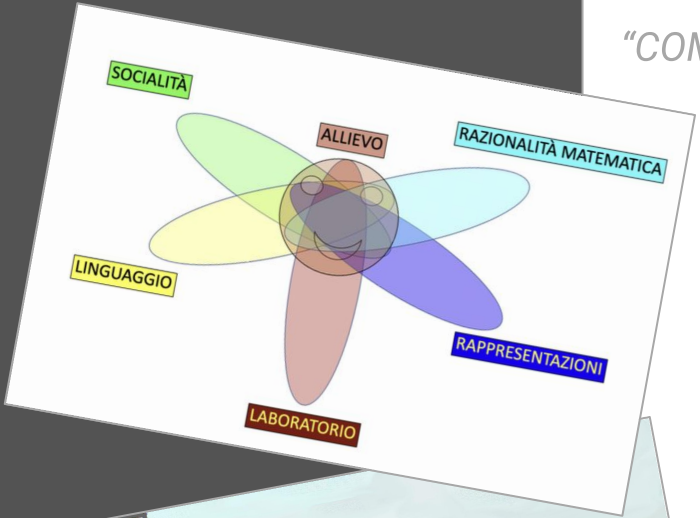
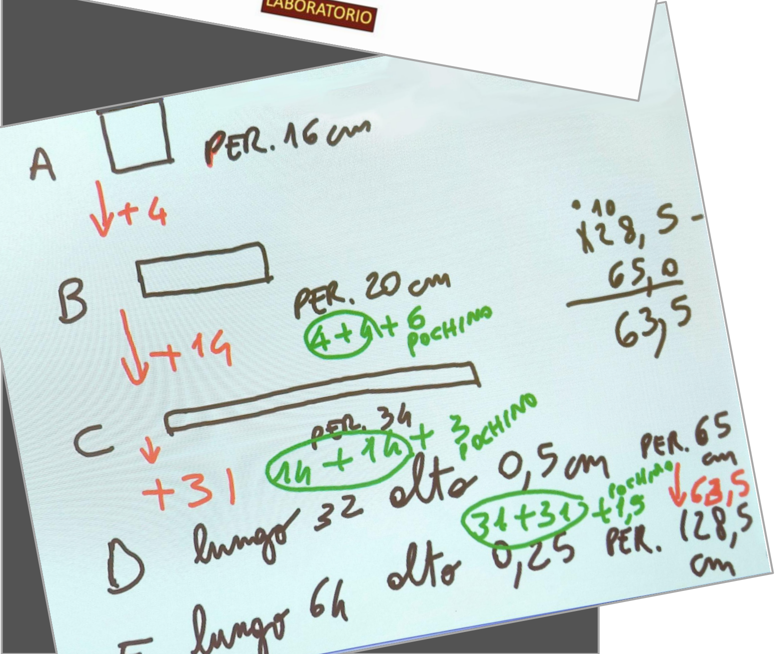




"COME ACCOMPAGNARE E GOVERNARE I CAMBIAMENTI.
Esempi di strategie e buone pratiche"
Torino, 19-20 settembre 2025

lacasadegli insegnanti ETS-APS

Costruire significati attraverso i segni

La matematica come discorso
La scuola come laboratorio

Nucleo di Ricerca in Didattica
della Matematica di Torino

Nella Bruno, Alessandra Delù,
Carola Manolino, Donatella Merlo

Ii Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica, coordinato dal prof. Ferdinando Arzarello, è nato negli anni ottanta. Ci si incontra puntualmente ogni due lunedì ed è costituito da insegnanti di ogni ordine scolastico che desiderano trovare un posto al di fuori della propria scuola dove:

- **CONDIVIDERE E RIFLETTERE SUL PROPRIO LAVORO CON ALTRI INSEGNANTI**
- **AFFRONTARE SITUAZIONI NUOVE**
- **CAMBIARE PUNTO DI VISTA**
- **AVERE IL CORAGGIO DI PROVARE**
- **IMPARARE DAI PROPRI ERRORI**

È una grande opportunità in cui ognuno agisce in piena libertà: non si è obbligati a entrare e nemmeno a restare se non interessa questo modo di lavorare.

Il lavoro di scambio, ricerca e costruzione di buone pratiche didattiche si sviluppa su percorsi a carattere **verticale.**
Pur avendo una natura aperta e dinamica, il gruppo si struttura in funzione dell'**ipotesi di ricerca** definita e condivisa all'inizio di ogni anno.
Tutti vi prendono attivamente parte condividendo le situazioni didattiche sperimentate e analizzando insieme i protocolli dei lavori prodotti nelle diverse classi.

L'ipotesi di ricerca del libro «Matematica come discorso»

Apprendere matematica equivale a "fare evolvere" la propria capacità di partecipare al **discorso matematico** (Sfard, 2026).

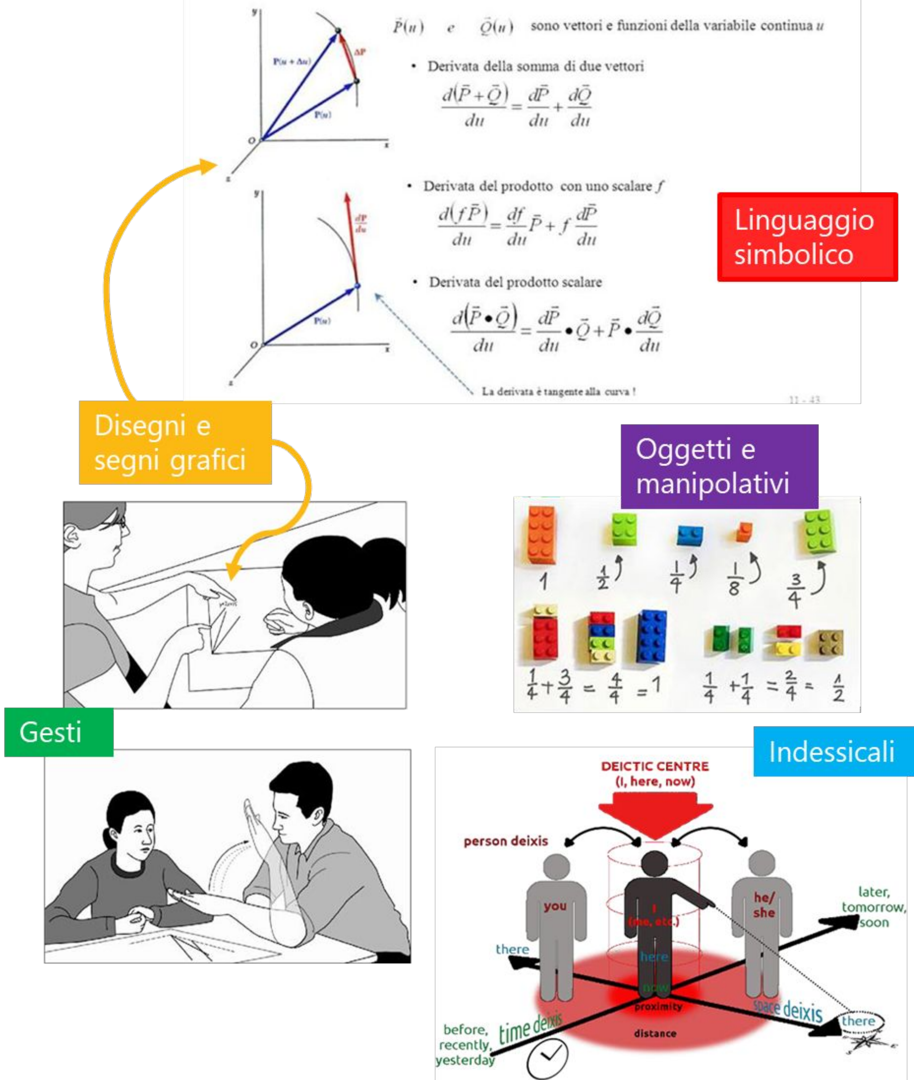
Il discorso matematico si basa su tre dimensioni:

- vocabolario
- mezzi semiotici
- regole meta-discorsive

Pertanto, "indagarne l'apprendimento significa conoscere i modi in cui gli allievi modificano le loro azioni discorsive sotto questi tre aspetti".

Premesse teoriche

L'apprendimento è un processo di "**addomesticamento dell'occhio**" **(Radford, 2010)**, un lungo processo che permette agli studenti, nell'uso di segni e artefatti, di trasformare l'occhio (e altri sensi) in **sofisticati organi teorici in grado di notare e dare senso a certe "cose" in modo matematico** - per esempio riconoscere la numerosità, le strutture algebriche, le invarianti geometriche ecc.



«Laboratorio» per costruire SIGNIFICATI

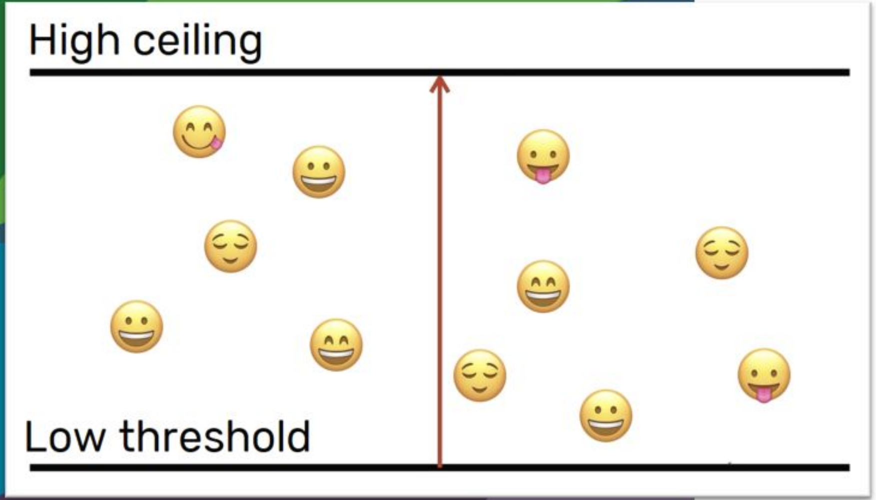
La classe vissuta come laboratorio in cui si **matematizza la realtà** attraverso **esplorazioni e congetture** in cui **si manipolano modelli** di oggetti matematici, in cui **la discussione** fra pari e con l'insegnante sono **elementi di un processo dinamico di scoperta**.
(Bolondi, 2016. In L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 39(5).)

Laboratorio di matematica

come approccio inclusivo

*A **low threshold high ceiling task** is one which is designed to be mathematically accessible, and to have built-in extension opportunities. In other words, everyone can get started and everyone can get stuck.*

***Un compito a «pavimento basso e soffitto alto»** è progettato per essere **matematicamente accessibile** e per avere opportunità di estensione incorporate. In altre parole, **tutti possono iniziare** e tutti possono rimanere bloccati.*



«Low threshold...High ceiling»
https://nrich.maths.org/8769

I conflitti commognitivi e il linguaggio sporco

Attività focalizzate sui processi più che sui risultati;

in cui anche i ragazzi più deboli partecipano attivamente, rinfrancati da un'impostazione del lavoro in cui non c'è necessariamente la richiesta di giungere subito a una risposta giusta e univoca.

Infatti si dà valore alle osservazioni e agli interventi di ciascuno, e si sperimenta che l'**errare**, il cambiare strada, spesso è l'**origine di nuove scoperte**.

Le proposte illustrate sono state progettate **per generare possibili conflitti**, ad esempio tra ciò che viene percepito e la scrittura algebrica, oppure nel passaggio da locale a globale. La discussione e il confronto con gli altri sotto la guida del docente favoriscono il superamento di tali conflitti per generare nuove comprensioni e costruzione di significato.

I conflitti commognitivi e il linguaggio sporco

Con questo termine indichiamo quando gli allievi (ma anche gli insegnanti) usano il linguaggio comune per riferirsi a termini matematici. La connotazione non è certo negativa, anzi indica una fase importante della concettualizzazione matematica.

Tre livelli di sviluppo (es. discorso algebrico):

- livello processuale
- **livello granulare** (le descrizioni dei processi non sono più copie conformi della sequenza di operazioni eseguite nel corso dei calcoli effettivi)
- livello algebrico

Ogni volta il linguaggio di un livello funge da meta-discorso sul linguaggio del livello precedente, il quale viene “ripulito”.

SUCCESSIONE DEI RETTANGOLI

Consegna di lavoro per la scuola primaria

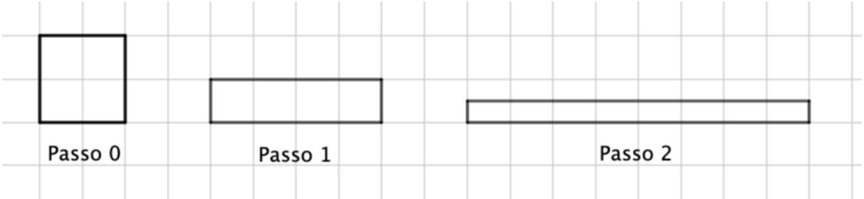
1. Disegna un quadrato (A) con il lato di 4 cm. Calcola perimetro e area.
2. Disegna un rettangolo (B) con la base doppia di quella del quadrato e l'altezza la metà di quella del quadrato. Calcola perimetro e area.
3. Disegna un rettangolo (C) con la base doppia di quella del rettangolo (B) e l'altezza la metà di quella del rettangolo (B). Calcola perimetro e area.
4. Confronta i perimetri e le aree che hai calcolato. Che cosa osservi? Spiega.

Consegna lavoro per la scuola secondaria

Costruite la seguente successione di figure

- passo zero: rettangolo di base e altezza 1
- passi successivi: rettangolo la cui base raddoppia e l'altezza dimezza rispetto alla base e all'altezza del passo precedente

Indicate cosa succede all'area e al perimetro del rettangolo al crescere di n.



Un esempio di «linguaggio sporco» e …

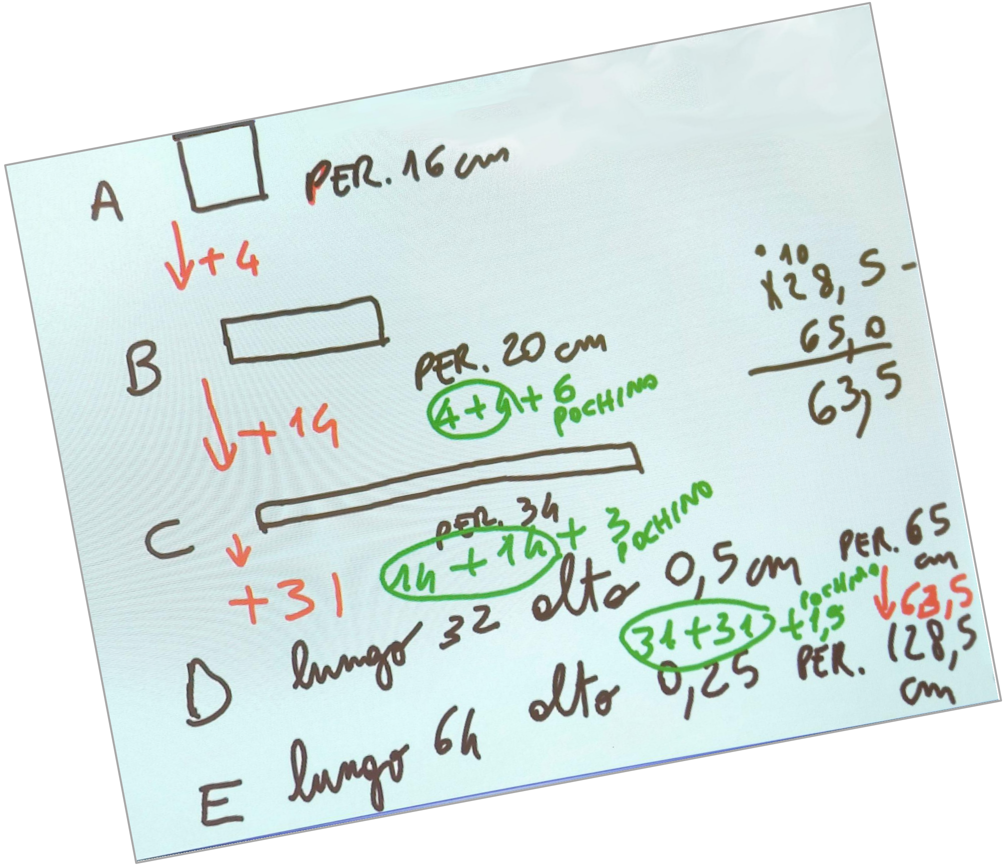
Il problema dei rettangoli

S.: E quindi è come tipo una scala.

B.: Che diventa il doppio ***più un po’***.

Mentre registra alla lavagna i calcoli suggeriti dagli alunni sulla differenza tra i perimetri, l'insegnante trasforma **l’espressione di B. in “pochino”** che, essendo una parola singola, da lì in poi viene trattata come **un’entità matematica.**

La forma diminutiva dà una **connotazione emotiva** che colpisce l’attenzione, suscita interesse, favorisce la memorizzazione.



Il problema dei tavoli

Alcuni amici organizzano una cena in un grande salone, hanno a disposizione molti tavoli, tutti uguali tra loro. Ogni tavolo è rettangolare; sul lato lungo del tavolo si possono sedere due persone, sul lato corto soltanto una. I due posti a capotavola sono occupati dalle due padrone di casa, Adele e Ginevra, che non potranno mai spostarsi sul lato lungo dei tavoli, ma dovranno sempre essere capotavola.

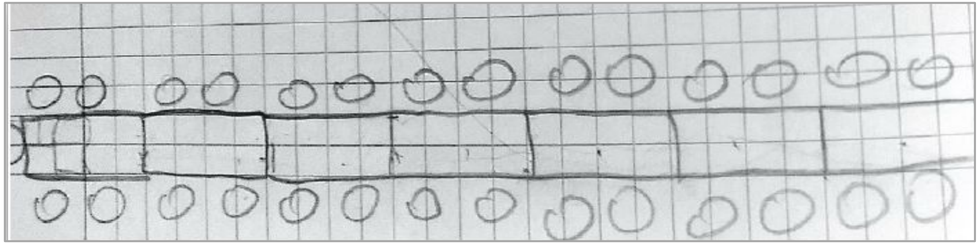
1. Quante persone ci saranno sedute intorno a un tavolo? Spiega perché.
2. Quante persone ci saranno sedute intorno a due tavoli uniti dal lato più corto[1]? Spiega perché.
3. Se si aggiungono altri 9 tavoli attaccandoli tra di loro per il lato corto, quante persone troveranno posto alla festa? Spiega perché.
4. Prova a trovare *la regola segreta* che, partendo dal numero dei tavoli, ti permette di sapere quanti posti ci sono. Spiega perché.

…di uso della gestualità

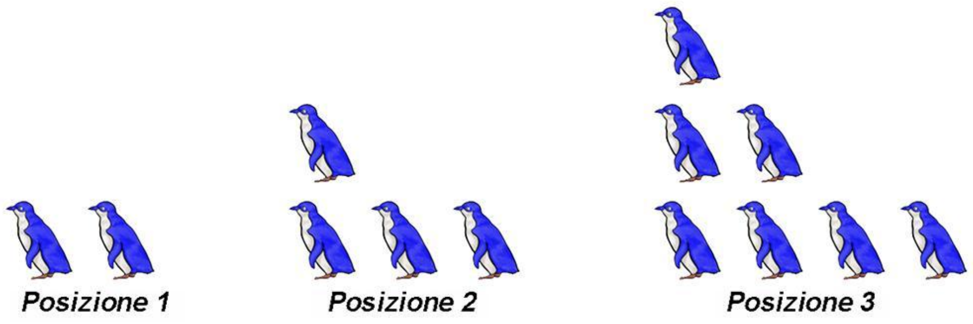
Il problema dei tavoli

Il gesto della bambina per rappresentare i tavoli **combaciati**.

I linguaggio verbale si intreccia con la **gestualità** e con le **rappresentazioni**.



Dai pinguini a…

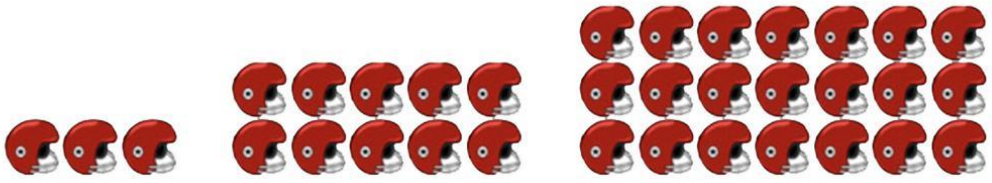


Gruppo	1	2	3	4	5	6	7	8
Numero pinguini	2	4	7	11	16	…	…	…

ruolo della tabella

Insegnante: In che modo potrebbe essere più alta? Come potremmo farla?
Sv.: Secondo me la quarta piramide non è come tutte le altre, sarebbe tutta intera. Sarà un triangolo. La terza non è un triangolo perché c'è l'ultimo pinguino dell'ultima riga che non è dentro il triangolo.
M.: Mi sembra che ho scoperto qualcosa, mi sa: se la prima piramide aveva 2 pinguini, poi è avanzato di 2, la terza ha avuto 3 pinguini in più quindi secondo me la quarta ha 11 pinguini perché 7+4 fa 11.

…ai caschi…



Posizione 1 Posizione 2 Posizione 3

Posizione 2
2 x (doppio di 2 +1) = 10

…Nel cercare la soluzione per la **millesima** posizione è stato poi necessario precisare meglio l'espressione della regola aggiungendo la parte mancante cioè **la moltiplicazione per il numero della posizione.**

Al termine dell'attività i bambini hanno espresso verbalmente la regola in questo modo: **«Moltiplico il numero della posizione per il doppio del numero della posizione più uno.»**

…ai fiammiferi!

Gruppo	1	2	3	4	5	6	7	8
Numero triangoli	1	4	9	16	25	…	…	…

I quadrati del numero del gruppo

inclusività

La creazione matematica richiamata dalla situazione dei triangoli

SUCCESSIONE DEI RETTANGOLI

Consegna di lavoro per la scuola primaria

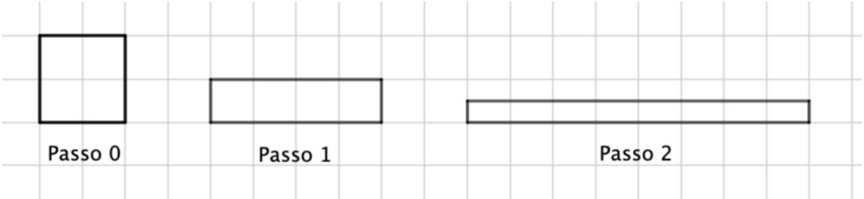
1. Disegna un quadrato (A) con il lato di 4 cm. Calcola perimetro e area.
2. Disegna un rettangolo (B) con la base doppia di quella del quadrato e l'altezza la metà di quella del quadrato. Calcola perimetro e area.
3. Disegna un rettangolo (C) con la base doppia di quella del rettangolo (B) e l'altezza la metà di quella del rettangolo (B). Calcola perimetro e area.
4. Confronta i perimetri e le aree che hai calcolato. Che cosa osservi? Spiega.

Consegna lavoro per la scuola secondaria

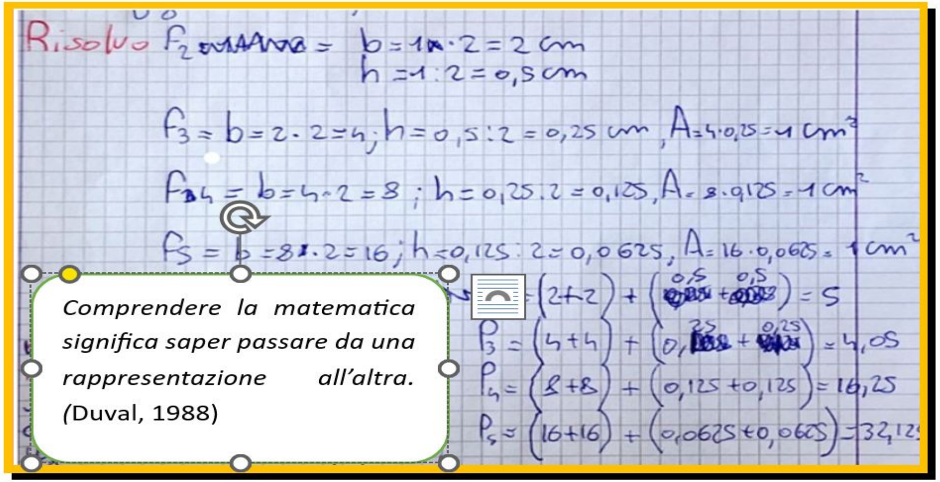
Costruite la seguente successione di figure

- passo zero: rettangolo di base e altezza 1
- passi successivi: rettangolo la cui base raddoppia e l'altezza dimezza rispetto alla base e all'altezza del passo precedente

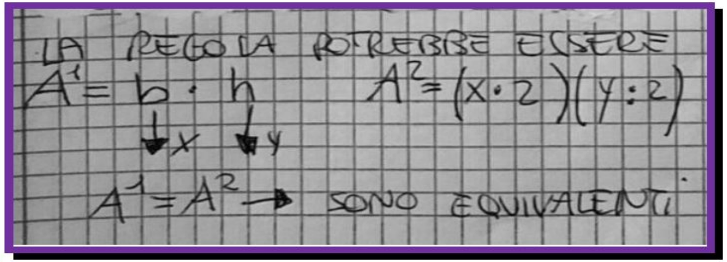
Indicate cosa succede all'area e al perimetro del rettangolo al crescere di n.

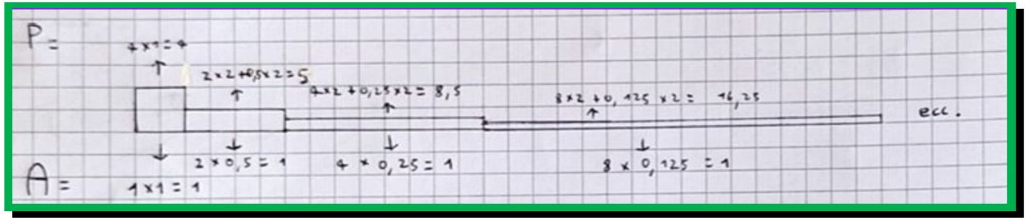


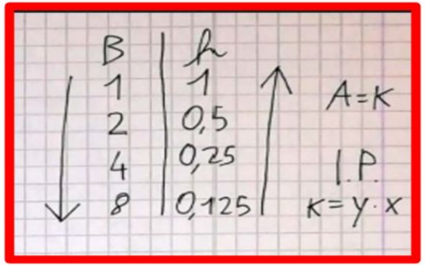
Alcuni protocolli sui diversi registri....

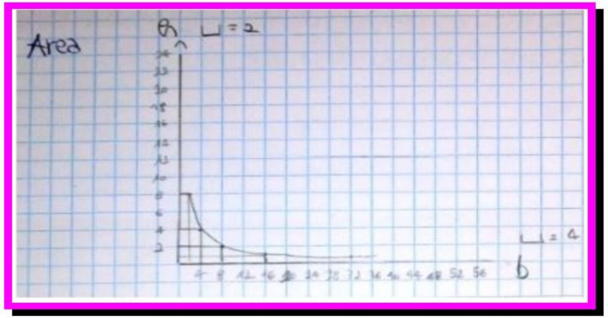


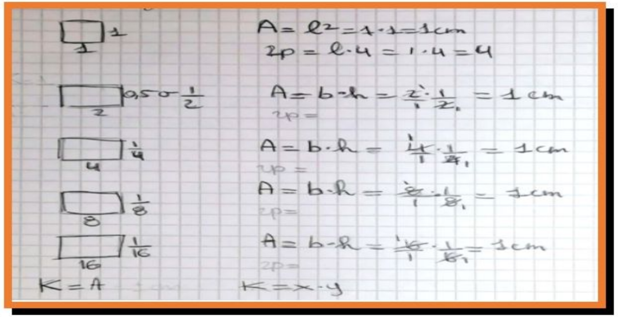
Comprendere la matematica significa saper passare da una rappresentazione all'altra. (Duval, 1988)





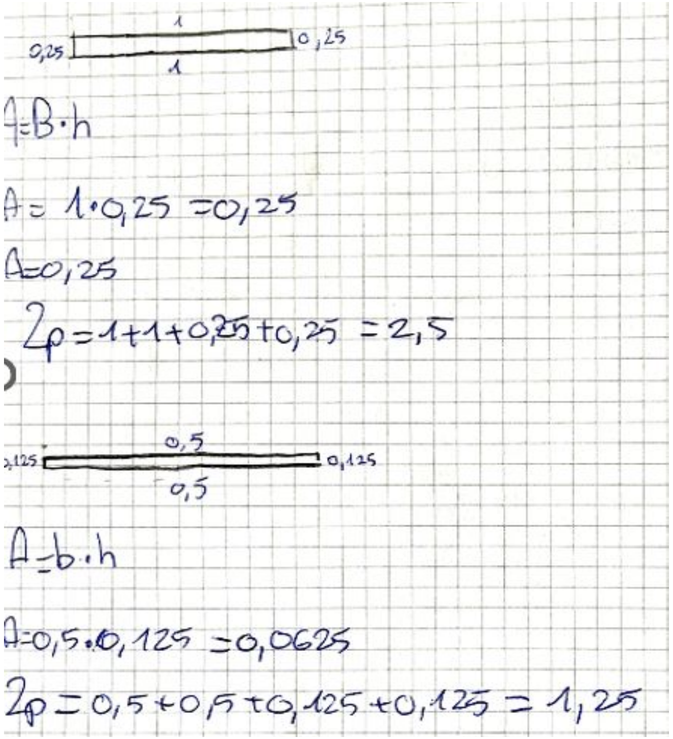


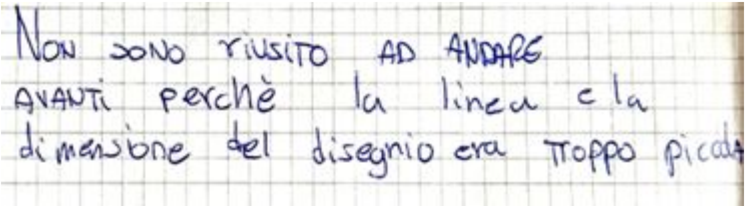




Un esempio di conflitto commognitivo

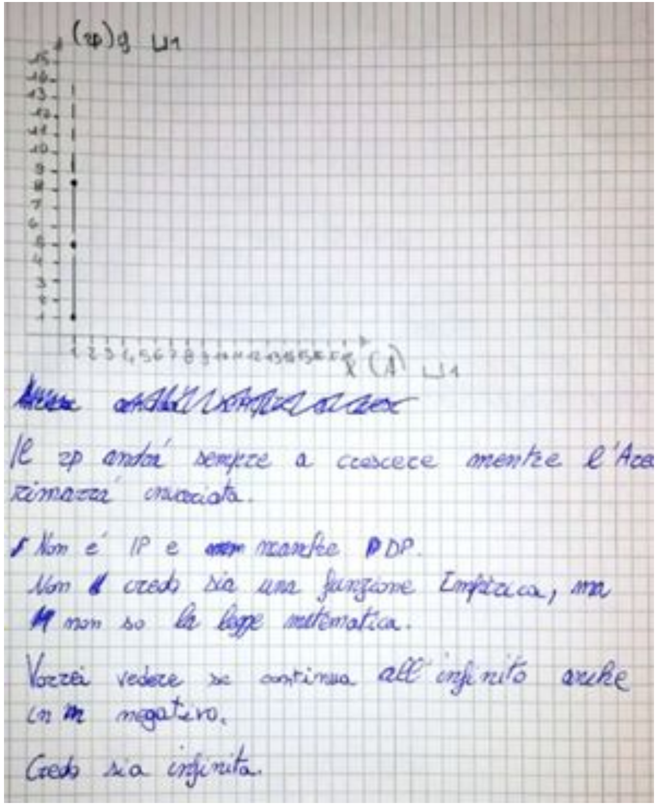
Richard: “***A un certo punto tutto si ferma***. *Non si ferma da un punto di vista matematico, perché si potrebbe andare avanti all’infinito, ma se mi riferisco al disegno delle figure che ho fatto. Infatti a un certo punto sono stato costretto a fermarmi.* ***Non riuscivo più a disegnare le altezze stavano diventando troppo piccole e le basi mi uscivano dal foglio***. *Però se stiamo sul campo matematico* ***potrei andare avanti per sempre***”.





Un esempio di conflitto commognitivo

*Luca: “Ho anche fatto **questo grafico per cercare di mettere insieme area e perimetro.** Ho **visto dai calcoli che il perimetro cresce sempre, ma non conosco se c’è una legge.** Una cosa è sicura, non è una funzione empirica perché noi se conoscessimo la legge potremmo fare delle previsioni, però non sono riuscito a trovare questa legge, potrei… **Avrei anche voluto vedere se i grafici continuavano a crescere all’infinito …”***

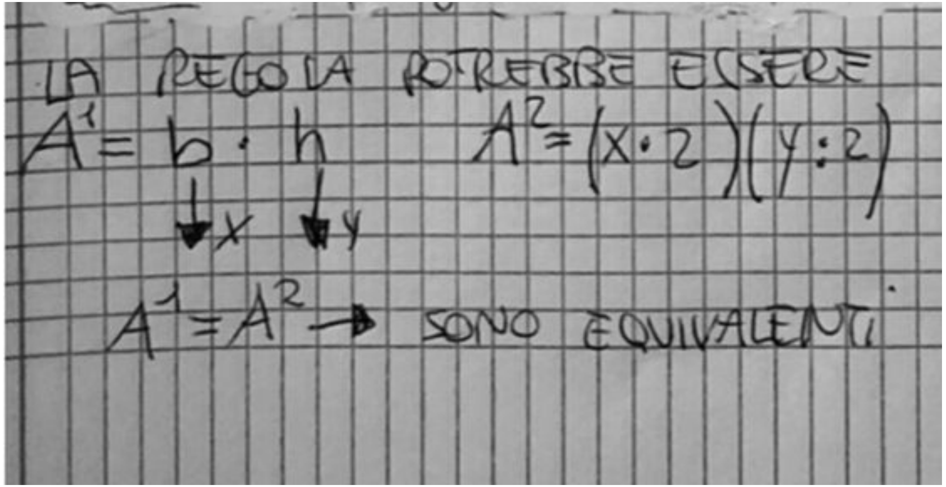


Un esempio di conflitto commognitivo

La **costruzione di leggi algebriche, che esprimono una dipendenza funzionale**, non è stato un processo facile.

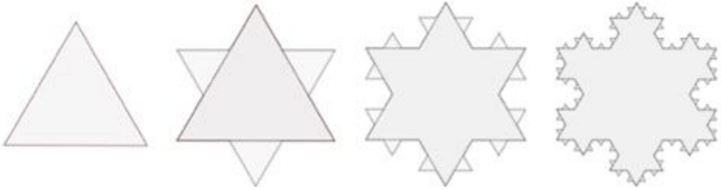
È stata interiorizzata l'idea e c'è stata una forma di pre-oggettivazione, ma **vi è ancora una mescolanza tra il numero e le variabili.**

C'è un **conflitto generato dalle funzioni diverse che assumono le lettere *b* (base) e *h* (altezza) e le variabili in gioco *x* e *y*.**



Espansione attività sui rettangoli_scuola sec. di II grado

Il fiocco di Von Koch



Passo 1 Passo 2 Passo 3 Passo 4

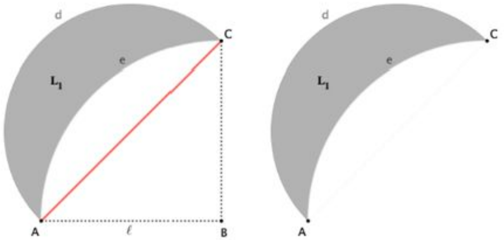
I triangolo di Sierpiński.

Passo 0 Passo 1 Passo 2 Passo 3 Passo 4

Le lunule di Ippocrate

Costruite ora una successione di lunule nel modo seguente:

L_1: lunula costruita sulla diagonale AC del quadrato ABCD di lato l.



Le parole chiave

PROGETTAZIONE

ASCOLTO

CONDIVISIONE

DISCUSSIONE

DOCUMENTAZIONE

RIFLESSIONE

FEEDBACK

VALUTAZIONE

RI-PROGETTAZIONE